行星面積定律的建立

姚珩
國立臺灣師範大學　物理系

前言

克卜勒（J. Kepler，1571-1630）在科學革命時期中，扮演著如伽利略（G. Galilei，1564-1642）一樣的重要角色。一些科學史家更稱

> "克卜勒是第一個冒險對天文學的問題，進行嚴密數學處理的人；是在新科學那特有的意義上，第一個確立起自然律的人。"
>
> "克卜勒是第一位在成功探究自然律時，發現其藝術性者。"（伯特，1994，p57）

這是因克卜勒所建立、發展出的橢圓定律，及面積定律（1609 年），要較伽利略的落體運動定律（1634 年），早了約 20 多年之久（Koyer，1978）。

> "他不僅是代表著，科學革命時期著名的思想運動前趨，...尤其是他的描述與研究方法，與晚近科學成功的方法，有許多共同之處。"（伯特，1994，p57）

本篇旨在藉他的行星面積定律，簡要地來呈現其開拓性方法與貢獻。

二、哥白尼的日心說－不在精確，而在簡單

克卜勒與伽利略兩人，皆承認哥白尼（N. Copernicus，1473-1543）爲他倆的導師。哥白尼所提的日心說，到底給了下一代的這兩位學子，什麼啓示呢？哥白尼說：

> "托勒密（*Ptolemy*）及多數的天文學者的行星理論，雖然與數據符合一致，看起來也未出現什麼困難。但這理論是不合適的，除非他所言的偏心點 *(equants)* 確實可被觀察到。他的理論顯示，行星並非以均勻的速度環繞著均輪 *(deferent)* 圓心，亦未以等速環繞著本輪 *(epicycle)* 圓心。所以，這種系統既非完全地絕對，也無法充分地讓心靈愉悅（*Hence a system of this sort seemed neither sufficiently absolute nor sufficiently pleasing to the mind.*）。"
>
> （Copernicus，1971）

所以，對哥白尼而言，他並非是要提出一更符合觀察數據的理論，而是因他不滿意托勒密理論中，加入了太多人爲的「偏心點、均輪、本輪」之概念，而喪失了「均勻性、對稱性、簡單性、與完美性」（哥白尼，1543；伯特，1994；姚珩和黃秋瑞，2003）。

事實上，縱使在今天，利用托勒密方法，仍然可以準確計算出火星逆行的軌跡，並與觀測值相當吻合（如圖 1）。

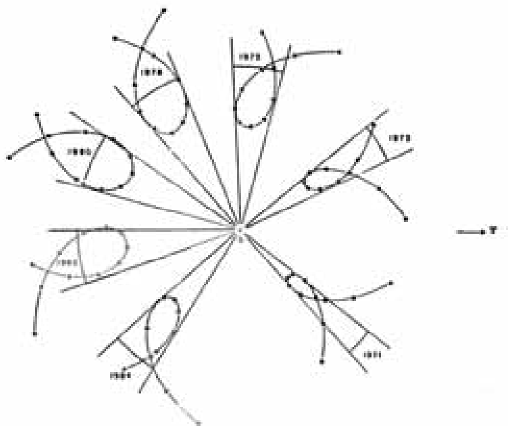

圖 1：自 1971 至 1984 年火星逆行軌跡觀測值（曲線），與托勒密模型理論值（點）之比較（引自 Anagnostakis，1984）

既然，兩個理論所建立的模型，皆可描述自然現象，但在當時，地動說卻得面臨極大的困擾。那就是：地球若在快速自轉的話，爲何天上的白雲與飛鳥，不會被遠遠地拋在後方（Koyre，1978）？在尚未能解決此問題的時候，爲什麼克卜勒是第一位挺身而出，接受、深究哥白尼的理論，並加以發展，終身奉行不渝呢？因爲，他認爲既

“數學…可呈現論證的有序本性，而與整體…相互呼應，…所藉用之簡單的…形式及要素，…是透過對稱性與規則性，緊密地被結合在一起。”（Kepler，1619，p7）

也就是說，克卜勒與哥白尼相信“凡在數學上能夠呈現出對稱、和諧與簡單性質的理論，則此理論必爲真”（伯特，1994，p52）。至於相關的物理或哲學詮釋，則可待以後再繼續探討、追究。這種不是以哲學的目的論── 地球爲宇宙的中心，人類靈魂的最終歸宿，是自地球經過月下區、行星層、最後抵達恒星界背後神所居住之處－爲天文學的指導，而是完全以數學做爲天文學的基礎與指標，開創了全新的科學世界（羅伊德，1984；Duhem，1985）。

三、行星基本運動定律－距離規則

克卜勒完全沿襲哥白尼以數學爲最高指導的原則，開啓了天文史上的新研究方法，他的新天文學拋棄了近一千五百多年來所沿用的托勒密理論，而採用了不被多數人所接受的哥白尼模型。但他也沒完全依賴哥白尼的智力權威，他花了五年多的時間，証明出太陽並非如哥白尼所言，是在行星軌道的圓心上，而是在偏心點上。且宇宙的中心不是在各個行星軌道的圓心，而是在太陽上（Kepler，1596）。他說：

“若隨著行星至宇宙中心(太陽)之距離增減，而形成行星的緩慢與迅速，則運動力之來源必定是落在我們所認為宇宙的中心點上。”

（Koyre，1992，p196）

如圖 2，行星是以等角速率繞著偏心點 C 點，運行於以 B 點爲圓心之軌道 $DFEG$ 上，而太陽是在另一偏心點 A 點上（$AB=BC$）。HK 弧長（正比於 $\angle HCK$）即行星運行 DF 弧長的所需花費的時間；同理 IL 弧長（正比於 $\angle ICL$）則可表示行星運行 EG 長度所需耗費的時間。經過仔細地推導，他得出了行星運動的基礎原理－距離規則（distance rule）：

“行星在行星遠日點與近日點處，行經

圓上相同路程所需花費的時間（HK 或 IL）與行星至太陽的距離（AD 或 AE）成正比。”（Stephenson，1987，p64）

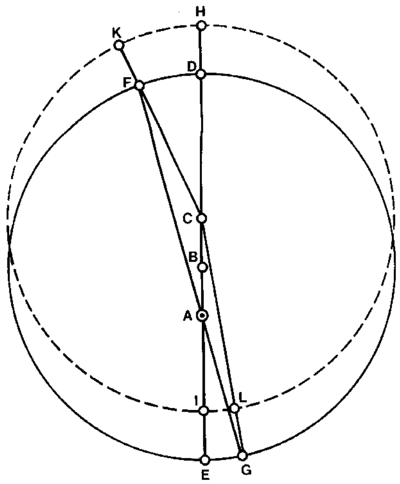

圖 2：距離規則－遠近日點速率與距離之關係：實線圓為以 B 為圓心，對 C 點以等角速運動的行星軌道；虛線圓為以 C 為圓心，其弧長可表時間。（引自 Stephenson，1987，p64）

此原理是克卜勒行星定律的基礎，利用此規則，克卜勒於 1605 年同時得到了橢圓定律及面積定律（如圖 3）（姚珩和黃秋瑞，2003；Kepler，1609；Wilson，1968）。底下將簡單介紹，他是如何利用距離規則，導出面積定律。

四、距離規則與面積定律

當克卜勒提出距離規則時，事實上這已經等價於面積定律了，因行星與太陽的連線 *R*，在甚短的 *dt* 時間內劃出弧長 *dC*，與面積 *dA*，如圖 4。則面積可近似為：

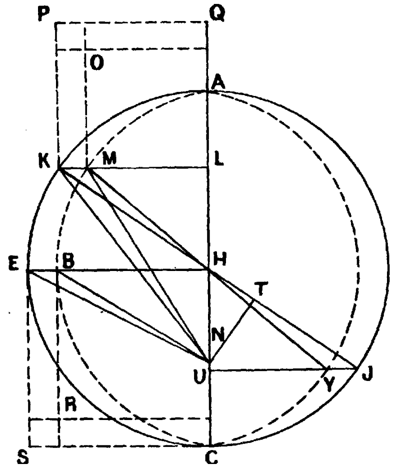

圖 3：克卜勒之橢圓軌道:由外接圓 *AKEC* 來描繪出橢圓 *AMBC*（引自 Koyer，1992，p275）

$dA = 1/2 \cdot R \cdot dC$ 或 $dA/dt = 1/2 \cdot R \cdot dC/dt$

根據距離規則，速率 *dC/dt* 與 *R* 成反比，故 *dA/dt* =定值，此即為面積定律。

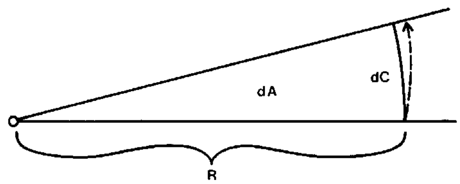

圖 4：距離規則（*d C/dt* 與 *R* 成反比）等同於面積定律（*dA/dt* =常數）（引自 Stephenson，1987，p161）

但克卜勒當時並不知極限與微分觀念，故他自然不是由此簡短步驟得到行星第二定律。

五、橢圓方程式

在新天文學（Kepler，1609）第 59 章裡，克卜勒引用了 Apollonius 之圓錐曲線著作，先列出了一些有關圓 *AKEC* 與橢圓 *AMBC*

（如圖 3）之定理或命題：

命題 1：ML ∶ KL ＝ b ∶ a，此處 a 與 b 為半長軸與半短軸長

命題 3：橢圓 AMN 面積∶扇形 AKN 面積＝b∶a

命題 7：在含焦點 N 之直角三角形，半長軸 a、半短軸 b 與離心率之關係為 $a^2 - b^2 = a^2e^2$ 或 $1 - b^2 = e^2$

命題 9：自遠日點 A 起，經圓弧至 K 為止，所含徑向距離(radial distance)KT 長之和，與圓面積 AKN 成比例。

爲避免如克卜勒所使用的繁雜運算，我們以微積分加以簡化闡述。自 A 點到 K 點，所含蓋之所有徑向距離 KT 長之和，爲

$$\int_0^\beta KN\cos NKHds$$

$$=\int_0^\beta KT\cdot 1\cdot d\theta$$

$$=\int_0^\beta (KH+HT)d\theta$$

$$=\int_0^\beta (1+e\cos\beta)d\theta = \beta + e\sin\beta$$

此處 $\beta = \angle AHM$ 爲離心偏角(eccentric anomaly)，若 HA＝1，HN＝e，圓面積＝π，

則面積

$$AKN = AKH + KHN$$

$$= (\beta/2\pi)(\pi) + 1/2\cdot HN\cdot KL$$

$$= 1/2(\beta + e\sin\beta)$$

此面積值恰爲徑向距離和之一半。故徑向距離之和，可以橢圓之外接圓之對應面積來表示（Aiton，1969，p84）。

命題 11：徑向距離 KT＝焦點 N 至橢圓上 M 點之連線長 NM。

因

$$KN^2 - NM^2$$

$$= (KL^2 + LN^2) - (ML^2 + LN^2)$$

$$= KL^2 - ML^2$$

$$= \sin^2\beta - b^2\sin^2\beta \text{（命題 1）}$$

$$= (1-b^2)\sin^2\beta = e^2\sin^2\beta \text{（命題 7）}$$

即 $KN^2 - e^2\sin^2\beta = NM^2$

但

$$KN^2 - e^2\sin^2\beta = KN^2 - NT^2 = KT^2$$

⇨ $NM = KT = 1 + e\cos\beta$

故 $KT = NM$ 。

不僅如此，橢圓上之任一點 M，至焦點 N 之長度 r，滿足底下關係式：

$$r = 1 + e\cos\beta \text{ 。}$$

這就是今天，我們所使用的橢圓方程式。它表示了行星橢圓軌跡，可以底下方法來描繪決定（如圖 3）：

1. 任取圓上一點 K，自 K 引垂直線至 AC 軸，交 AC 於 L。
2. 以直線連接 K 與圓心 H，並延長至 J。
3. 自太陽 N 處引垂直線，交 KJ 於 T。
4. 以 N 爲圓心，KT 長爲半徑，劃弧，交 KL 於 M，則 M 即爲行星橢圓路徑上之點。

在命題 11 之推導裡，很清楚地可看出，克卜勒已使用行星火星至太陽的距離 r，離心率 e，及離心偏角β，三者間之等量關係：$r = 1 + e\cos\beta$，其中 e 爲定數，r 與β 爲變數。

這些很明顯的是受了法國數學家 Vieta（1540-1603）的影響，於 1590 年，他是第一位真正地以字母符號來代表一未知量的科學家，他的這種高度之抽象化、普遍化的觀念，被視爲數學發展上最重要的里程碑之一（Bell，1945，p120）。克卜勒使用了此深刻概念，協助自己來描述天文運動，將傳統的幾何學內容，擴展變成代數的處理與表示。這種全新的呈現，在物理發展史上是第一次、也是第一人，要比伽利略所提出的落體關係早出許多。

六、面積定律

由命題 9 與 11，遂可得

命題 12：在橢圓內，所有焦點至橢圓上連線距離 *NA*、*NM* 之和與對應之正外接圓面積 *AKN* 成比例。（由命題 3，也因此與橢圓面積 *AMN* 成比例。）

克卜勒在此把距離不時變化著的運動－橢圓，與傳統完美的幾何圖形－圓，連接了起來。也將含有物理內涵的距離規則，與底下具有均勻性的面積定律，建立起了特殊關係。

克卜勒最初所言的距離規則（如圖 2），可進一步延伸爲：

“在圓軌道不同位置上，如遠日點與近日點，行星運轉經過相同弧長所需的時間比，等於在對應弧段下，太陽至行星之所有連線距離和之比（*The times needed to traverse equal arcs of the eccentric circle are proportional to the distances.*）”（Aiton，1969，p79）。

也就是，並非以單一距離長度來代表所費時間，而是以距離和來代表。此外，我們須了解，至此距離規則一直僅用在圓周軌道上。在發現行星之軌道不是圓後，爲了要與觀察吻合，克卜勒在第 59 章裡將此規則，作了修正（如圖 5）：

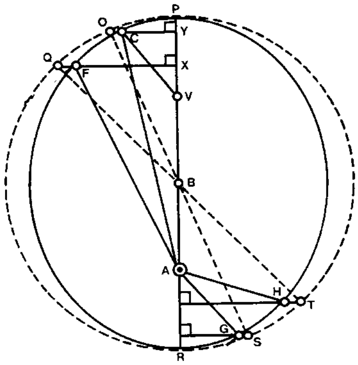

圖 5：克卜勒修正的距離規則（引自 Stephenson，1987，p162）

行經對應相同圓弧長，如 PO、OQ、RS、ST，下的橢圓路徑，如 PC、CF、RG、GH，所花費的時間比，等於太陽至相對應橢圓區段上，行星之所有連線距離和之比。（The time is measured by the sum of the ellipse distances relating to equal divisions of the eccentric.）（Aiton，1969，p86）

因此，最後由命題 12 與此修正之距離規則，便完成與得到了有名的行星第二定律：

命題 14（面積定律）：行經橢圓路徑 AM 上每一點至焦點之連線距離和，或所需花費的時間，可由橢圓面積 AMN 來

表示（如圖 3）。（The sum of the distances for the ellipse path AM, and hence the time is measured by the ellipse area AMN.）（Aiton，1969，p87）

綜合以上，可簡言之，克卜勒是以底下程序，來建立其面積定律：

橢圓面積↔連線距離和↔行經橢圓路徑所需時間。

大約十年之後，克卜勒在哥白尼天文學序論（Kepler，1618）的著作裡，用了另一種較嚴謹的方法，描述了可用在橢圓軌道上之改良更新後的距離規則：

“行星運轉所需時間，正比於它至太陽的距離，因各弧長在與徑向垂直方向上之分量均同。（The times or delays will be proportional to distance from the sun, for arcs whose component perpendicular to the radius from the sun are the same.）”（Stephenson，1987，p163）

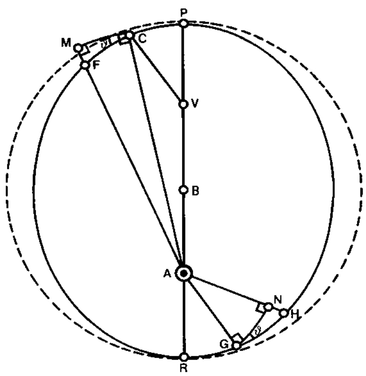

圖 6：克卜勒改良更新後的距離規則與面積定律（引自 Stephenson，1987，p164）

這是當所取面積相對小的時候，在橢圓軌道上，任一相等弧段，所對應之橢圓區域，或近似三角形裡之高度（或與徑向垂直方向上的分量）相等（如圖 6，意謂 $PC=CM=RG=GN$）。所以由改良更新的距離規則，劃過此弧長所需的時間，與至太陽之距離成正比，因此，亦與含蓋此橢圓區域的面積成正比。即

$t_{PC}:t_{CF}:t_{RG}:t_{GH}$

＝PA：CA：RA：GA

＝PCA：CFA：RGA：GHA

“故以面積來代表時間是適當合理的。*（Therefore, it is quite justifiable to take the area as a measure of the time.）*”（Aiton，1969，p87）

也就是說，面積是跟著時間穩定地在改變，或面積時變率恆定不變，這也保留下來了另一種之均勻性（uniformity）的要求，所以克卜勒視此定律為他最鍾愛之原理。

在上述的描寫中，已略可看出，克卜勒心中已漸浮現出無限小與積分之概念和方法了。亦即，他將足夠小的不同橢圓區域所劃過之弧長，近似為相等。他最後還曾如此提及：

“行星與徑向垂直的速度分量，反比於它至太陽的距離。（The component of the velocity perpendicular to the radius vector is inversely proportional to the distance from the sun.）”（Kepler，1618；Aiton，1969）

這幾乎就是在預言第四節中所言：行星

速率的垂直分量 *dC/dt*，與行星至太陽距離 *R* 成反比。這種幾何與代數的合成方式，及背後所隱含的極限觀念，顯然已在天文學中，開啓了新的研究方法。

七、結論

克卜勒視太陽爲宇宙之中心，但它不在諸行星軌道之圓心，而是在軌道的偏心點上；他並以太陽所發射之光芒與動力，是一切天體運動之成因，形成了行星運動的基本原理 一 距離規則。由此，不但得到了天文學上第一個新數學關係－橢圓的代數方程式 $r = 1 + e\cos\varphi$ 。並以它來清晰地描述行星運動的軌跡，且再藉著鍥而不捨的運算、推導，創立了面積定律－太陽與行星連線所劃過的面積，其變化是均勻的。維持了哥白尼所期望的數學均勻性。

克卜勒的論證與運算，呈現出與托勒密完全不同的面貌，它不是用天文學來配合哲學的目的論，而是全部以數學方法，並僅在數學之中，及自數學推導出的相關動力學觀，來建立起天文體系。這種新方法，啓發了牛頓，及世世代代的眾多科學家，一直沿用至今。

參考文獻

1.伯特 (Burtt， E. 1994)：近代物理科學的形而上學基礎。成都市：四川教育出版社。

2.哥白尼 (Copernicus， N. [1543] 2001)：天體運行論。武漢市：陝西人民出版社。

3.姚珩、黃秋瑞 (2003)：克卜勒行星橢圓定律的初始內涵，科學教育月刊，第 256 期，第 33-45 頁。

4.羅伊德 (Lloyd， G. 1984)： 亞里斯多德思想的成長與結構。台北市：聯經出版社。

5.Aiton， E. J. (1969). Kepler’s second law of planetary motion. *Isis*， *60*， 75-90.

6.Anagnostakis， C. (1984). The Arabic version of Ptolemy's planisphaerium.Thesi’s (Ph.D.) —Yale Univ.， Ann Arbor， Univ. Mich. Microfilms International.

7.Copernicus， N. (1971). *Three Copernican treatises.* New York: Octagon Books.

8.Duhem， P. (1985). *To save the phenomena*. Chicago， IL: University of Chicago.

9.Kepler， J. ([1596] 1981). *The secret of the universe.* New York: Abaris Books

10.Kepler， J. ([1609] 1992). *New astronomy.* New York: Cambridge University Press.

11.Kepler， J. ([1618-21] 1952). *Epitome of Copernican astronomy: Books IV and V.* Chicago， IL: Encyclopaedia Britannica.

12.Koyer， A. (1978). *Galileo studies.* Atlantic Highlands， NJ: Humanities Press.

13.Koyer， A. (1992). *The astronomical revolution Copernicus-Kepler-Borelli*. New ork: Dover Publications， Inc.

14.Stephenson， B. (1987). *Kepler’s physical astronomy*. New York: Springer-Verlag Inc.

15.Wilson， C. (1968). Kepler’s derivation of the elliptical path. *Isis*， *59*， 5-25.