克卜勒行星橢圓定律的初始內涵

姚珩*　黃秋瑞**
*國立臺灣師範大學　物理系
**國立臺灣師範大學　科學教育研究所

摘要

克卜勒遵循著哥白尼以數學的簡單性及均勻性爲基礎之理念，接受並進一步推廣了日心說，他還證實：太陽是在行星軌道的偏心點而非圓心上。他認爲太陽所放射出之光芒或力量，對行星在不同地方會有不同的影響，由此導出了行星在與太陽不同距離的位置上會有不同的速率之距離規則。從這個基本規則，最後他得到了行星的橢圓軌道定律。

關鍵詞：天文學、行星橢圓定律、克卜勒、科學史。

前言

古典物理奠基在牛頓力學上，而牛頓力學則是融合了伽立略落體運動，及克卜勒行星定律的觀念。這也是爲何從國中力學（國立編譯館, 2000）直到大學的普通物理學（Yang & Freedman, 2000），皆是以伽立略的加速度概念開始；高中物理（國立台灣師範大學科學教育中心, 1999） 則會再簡單介紹克卜勒行星定律。但由於各種教科書，甚至是大學天文學（Pasachoff & Filippenko, 2000）及理論力學教本（Marion & Thonrton, 1995 ），或許是因受限於教學目標及授課時數，對行星定律均只能做精要地敘述，而無法對它們最初如何形成、所使用的方法、歷史演進過程、以及所表現的時代意義，給予較完整的呈現。本篇文章即是欲透過行星橢圓定律原初內涵的探討，儘力將上述主題簡潔地描述，期讓教學者對當時之科學背景、思考方式，能有一些較清楚的掌握與了解。

一、歷史背景

從巴比倫人大約在西元前兩千年，把天上分成 12 個星座開始，人類的生活空間，就由地面擴大轉向至天上了。當時人們在天上所欲真正尋找的，乃是天體與人類緊密聯繫著的關係和秩序。因爲人們有時似乎甚難用社會的、經濟的現象，來解釋人類生活本身，而不得不求助於相應的天上現象來協助，天是世界的主人和管理者，也是人類生活的統治者。在這樣的要求下，巴比倫人開始累積了許多觀測方法與天文資料（卡西勒, 1994, p72）。

當希臘人建立並發明了幾何方法與抽象思考後，很自然地會用此方法，施展和發揮在巴比倫豐富的天文資料上去。其中，天體上最特殊的一個現象，即是有五顆會動的星體，它們不像月亮是穩定地以圓弧前進，而是有時會有倒退逆轉的情形發生，彷彿在天空漫遊，而被稱爲漫遊者或行星。歐多克斯

（Eudoxus, 400-347 B. C.) 是第一位用幾何模型來詮釋行星的此種逆行現象。他用內外兩個同心球殼，旋轉方向互相垂直，內殼爲行星所在之圓球，行星在其上作圓周運動，外殼爲恆星球殼，恆星在其上不動，但整個背景 (星座) 在動。這樣，就可以產生行星的逆行現象。他也因此被視爲天文學之奠基者（Hetherington, 1987, p125）。

接著阿波羅尼斯（Apollonius, 約 200 B. C.) 及依巴谷（Hipparchus, 約 135 B. C.) 提出了新的幾何模型：偏心圓 (eccentric) 體系與本輪－均輪 (epicycle－deferent) 體系。偏心圓模型意謂：行星 P 以等速繞圓心 C 做圓周運動，但地球並不在圓心 C 上，而是稍微偏離開圓心。而此圓心 C 與半徑 CP 會再繞地球運轉，如此可解釋行星之逆行。本輪－均輪模型則是說：地球位於主圓 (均輪) 中心，在圓周上，有另一小圓 (本輪或周轉圓) ，行星則只在此小圓上做圓周運動，而此小圓之圓心，會再以等速環繞地球運轉，同樣可給出逆行效果。此二模型基本上是等價的（羅杰斯, 1989, p67）。

到托勒密（Ptolemy，約 130 A. D.） 爲了能更正確與方便地計算出行星之位置，他提出了合成模型－偏心點 (equant point) 體系。在此體系中，如圖 1，本輪之圓心雖是繞著均輪之中心 C 作運轉，但非等速，而是以等角速率，環繞著偏離圓心之點 E 運轉，此偏心點 E 與地球 O，則分別在圓心 C 之不同兩端。托勒密用此模型可以描述出每一顆行星的運動細節，並建立起非常完整的天文圖表，與實際的觀測結果差別不到 10′ 角（Kozhamthadam, 1995, p166）。並且他以地球爲宇宙中心的觀點，與亞理斯多德 (Aristotle 384 – 322 B.C.) 之哲學觀點－目的論（teleology) 相當一致，故能在西方暢行將近 15 世紀之久 (羅伊德, 1984)。

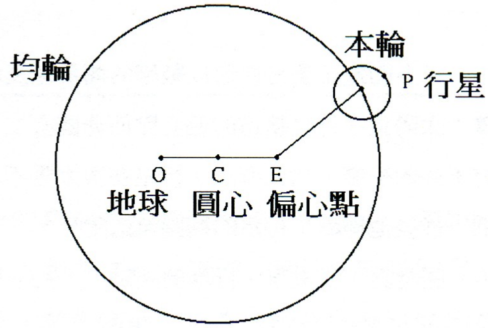

圖 1：托勒密行星運動體系

一直到哥白尼（Copernicus, 1473-1543) 時，他質疑偏心點體系之過度人爲性，且本輪中心與均輪中心連線所成角度，並非均勻改變，亦與均勻或等速運動原則相矛盾，背離了自然之簡單性，破壞了幾何學之美感(拉卡托斯, 1987)。

“同心圓、偏心圓和本輪，…引用了許多顯然與均勻運動的基本原則相抵觸的概念，…也不能得出…對稱性，…彼此不協調。…那些人採用偏心圓論證的過程或方法，要不是遺漏了某些重要的東西，就是塞進了一些外來的、毫不相關的東西。”（哥白尼, 1543, p3)

如果以地球爲宇宙中心，並不能給出完美均勻的圓形，那麼要以什麼做爲天體的中心，才可達成此理想? 在圖 2 中，O 爲托勒密體系中之地球，P 爲行星並位於以 G 爲圓

心之本輪上，哥白尼發現，若取OO'平行且等於 PG，並視O'爲地球，G 爲行星，O'以OO'爲半徑繞著圓心 O 作圓周運轉，則從地球O'觀測行星 G 之情形，恰與托勒密之 OP 完全一致。這就是有名的地動 (earth's mobility) 理論，最後，哥白尼發現若將太陽置於圓心 O 上，則會與觀測值相當吻合 (Barbour, 1989, p216)。

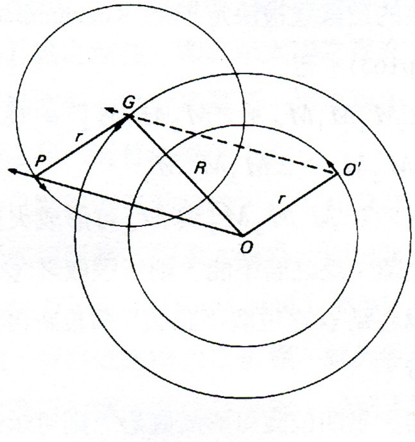

圖 2：哥白尼日心體系
（引自 Barbour, 1989, p216）

二、克卜勒的偏心學說

(一)偏心點之再引入 — 太陽為宇宙之真正中心

在哥白尼對托勒密的偏心點體系，感到太過人爲化與不圓滿，而提出了地球與所有行星，均環繞著一共同的幾何中心，在做圓形運轉的日心理論。但太陽是否真正位於所有行星圓周運動的幾何圓心上，還是接近於此圓心? 哥白尼亦不十分確定。在天體運行論（哥白尼, 1543) 第 10 章裡有：

"靠近太陽之處，是為宇宙之中心。(*Near the sun is the center of the universe.*）"

此處所言"靠近"，亦即非真正是在中心。但在同一章裡，又寫著：

"萬物之中央，即是太陽。(*In the middle of everything is the sun.*）"

前後說辭不一，甚爲明顯。且依照哥白尼的學說，圓周運動的幾何中心，並非全然固定的，而是有著些微的來回擺盪 (Kozhamthadam, 1995, p148)。克卜勒並不滿意這些種種之含糊與缺陷，此外，他始終相信太陽乃宇宙中最特別之星體：

"它是萬物的生產者，... 它是光的泉源，... 是一切色彩的描繪者。" (Kepler, 1937, p266)

"藉著光，它與萬物交流，因此，它正確的居所必是全世界之中心，如此他才可永遠均勻地，將自身散佈傳播至整個宇宙。" (Kepler, 1937, p19)

克卜勒認爲太陽是真正宇宙動力的來源與中心，且必是穩定不動者。他於是開始尋找這個宇宙中心之幾何位置，且將宇宙的結構與變化，全建立在此最純粹的、及第一推動者－太陽的影響上。

雖然，他對哥白尼賦予最大的尊重，但也不讓自己被囚禁束縛在他導師的理念下。爲了要排除哥白尼學說中對太陽位置所含的模糊性，及解決行星確實具有環繞太陽運轉之非等速性，克卜勒重新再回顧審視，並接受了托勒密之偏心點觀點，但賦予其更新的內涵。

"任何人研讀了此段有關偏心點之論述，將必歡樂。因為如果天文學者驚訝於，托勒密毋需證明而可假設偏心點之重要性，

他們將更驚奇於，其中竟然有可以解釋的理由存在著。”（Kepler, 1596, p219)

這新的偏心點學說內容是什麼？可以解釋其存在的理由又是什麼？克卜勒在新天文學（Kepler, 1609) 第 10 至 21 章中，先選取了四個在日落時，背對著太陽，觀察剛昇起（acronychal observation）的火星經度（longitude）之水平位置（如圖 3）。他依照哥白尼所言，以太陽爲固定不動點 S（但不一定是圓心），在落日時，地球介於太陽與火星之間，SM_1、SM_2、SM_3與SM_4四直線分別表示在 1587 年 3 月 6 日、1591 年 6 月 8 日、1593 年 8 月 25 日及 1595 年 10 月 31 日時，所觀測到的火星經度方向，故角M_1SM_2、M_2SM_3等之大小即可得知（但尙不知M_1、M_2、M_3與M_4落於直線上何處，因還不知火星與太陽之間的距離）(Jacobson, 1999)。

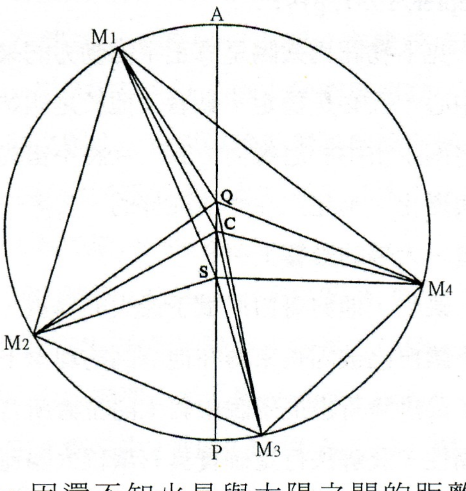

圖 3：克卜勒火星暫代性假說（引自 Voelkel, 2001, p106）

克卜勒再採用 1587 年第谷（Tycho, 1546-1601) 所定出的遠近線（line of apsides，即偏心點與均日點之連線 QS，且 QS 線之經度被訂爲$148^0 48'55''$)，若火星對於取定的偏心點 Q 爲等角速率，由火星週期 687 天爲 360^0，亦可得知時間角度 M_1QM_2、M_2QM_3等。在 AP 直線上，若太陽 S 與偏心 Q 選定後，則由 QS 長度與上述經向觀測及時間角度，可表示出太陽與火星在四種狀況下之距離SM_1、SM_2、SM_3與SM_4，故火星的位置遂被決定下來(Kozhamthadam, 1995, p163)。若

$$\angle M_2M_1M_4 + \angle M_2M_3M_4 = 180^0 = \angle M_3M_2M_1 + \angle M_3M_4M_1$$

則四點$M_1M_2M_3$與M_4可形成火星之圓周軌道；反之若不能，則所選取之 QS 長度或偏心點 Q 之位置不正確，需重新再定 Q 之位置。

若火星四位置可形成圓形，則可求得圓心 C 點之位置。然若$\angle ASM_1 \neq \angle CSM_1$或 C 點不在 QS（或 AP）直線上，意謂偏心點 Q、圓心 C 及太陽 S 三點，不在一直線，則需選取新的 Q 點位置，從頭再算一次，直到 Q、C、S 三點共線爲止。以上這些工作，並非是件容易的事：

“如果這種冗長的方法讓你厭煩的話，你或許更會憐憫起我來。因為我花費了巨大的時間，反覆了至少 70 餘次的計算，從探討火星開始，至今已過了五個年頭。”（Kepler, 1609, p256)

克卜勒最後，可讓 Q、C、S 落於同一直線上，且以 C 點爲中心之圓，可通過四個火星觀測位置，若半徑長爲 1，則他得出

$$QC = 0.07232, \qquad CS = 0.11332$$

亦即圓心，並不平分偏心點至太陽之距離。火星即是以太陽位在偏心點上之此種圓形軌道在運轉，克卜勒稱此結果爲暫代性假說（vicarious hypothesis）。它取代了托勒密的平分（bisection）觀點，及哥白尼的無偏心點主張。此外，此假說還意涵著：

1.行星所做的圓周運動，對圓心而言並非爲等速，但對偏心點而言則爲等角速。而 $\angle AQM$ 稱爲均偏角（mean anomaly）。
2.偏心點之存在，即表示太陽之存在。一如托勒密偏心之行星體系，可逼現出，在圓心之另一端有地球存在著。
3.遠日點與近日點相較，在同樣時間下，經過較短弧長。如果太陽爲一切行星運動之生命力（animal force, soul）來源，很自然地，受到此生命力之影響，就與距離太陽之遠近有關。在遠日點處，受到太陽所發出動力之影響較少，故會運行得較慢（Kozhamthadam, 1995, p91-92）。

克卜勒的偏心學說，不僅相當地吻合觀察結果，且指出天體運動的真正成因，全是來自於穩定不動者－太陽。它不僅接近宇宙的幾何中心，更重要的，它乃爲世界的真正動力中心，是天體運轉的力量來源。由於這個假說是以後所有行星理論之基礎，故有時亦被稱爲克卜勒行星第零定律 (Gingerich,1975, p261; Martens, 2000, p71)。

(二)地心說之完全棄絕 — 地球僅是一顆行星

哥白尼雖然提出了日心理論，但他依然不易全然擺脫地心說之殘留影響。譬如，他視地球與其他行星不同，在天體運行論中，所有除了地球以外的行星軌道，其偏心距(偏心點至圓中心之距離，當半徑爲 1 時，亦可視爲離心率 eccentricity）均是以地球軌道之中心爲參考點，而唯獨地球軌道之偏心距，是從太陽爲中心起算（Kozhamthadam, 1995, p173)。顯然，哥白尼對地心說之摒棄並不完全，一如對日心說之提出並不完整。

另一方面，在托勒密學說中，所有行星環繞著地球時，都對應於某一偏心點，在做等角速圓周運動，惟獨太陽環繞地球時，則無此偏心點，或此時偏心點與地球重合。種種這些特殊而非普遍的狀況，一直受到克卜勒之質疑：

> “在宇宙奧秘一書，我已提及太陽之偏心點觀念，表示我對太陽（或地球）無偏心點之遺憾，...”（Kepler, 1601, XIV, p11）

> “在宇宙奧秘書中，我已讓此點（地球需要有偏心點）觀念，成為該書之主要特色，且將它視為（理論）基礎上之重要支柱。”（Kepler, 1596, p219）

克卜勒用了兩種方法，證明出地球軌道的圓心不會與太陽重合。在新天文學第 24 章裡，使用了第一種方法 （如圖 4)，以均日點(mean sun)或等角速率參考點 Q 出發，每當火星運轉一週期 687 天重回 M 後，分別對應有由地球觀看火星的四個不同之相對角度，即直線 E_1M 、E_2M 等方向可由第谷所做之觀測決定，故 $\angle E_1MQ$、$\angle E_2MQ$ 等亦可得知，而由固定的一火星年時間間隔相對於 365 天，則可定出 $\angle MQE_1$、$\angle MQE_2$ 等。由一固定邊 QM 及二角 $\angle E_4MQ$ 及

$\angle MQE_4$ 即可唯一決定出三角形 MQE_4，或地球 E_4 點所在之位置（或由正弦定律，可以 QM 表示出 QE_4 之長度）。同理 E_1、E_2、E_3 之位置亦可以相同方法求出，如此 E_1、E_2、E_3、E_4 可定出一圓，而圓心 C 點所在位置也隨之得到。克卜勒發現 $C \neq Q$，且 $QC=0.01837$（若圓半徑＝1），所以地球雖是繞日作圓周運轉，但卻不是在做等速運行，因為圓心並沒有落在偏心點 Q 上，亦即地球之運轉現象與所有其他行星一樣（Stephenson, 1987, p54）。

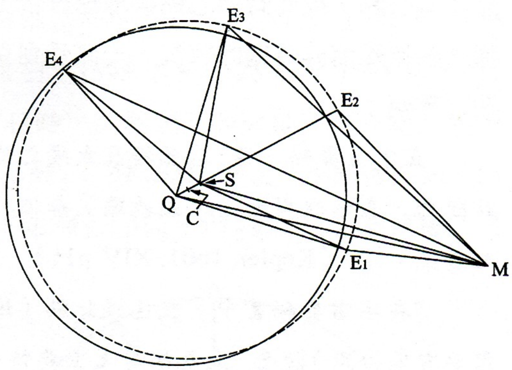

圖 4：地球之偏心圓軌道：實線圓為以均日點 Q 為中心，且通過地球某一位置 E_4 之圓；虛線圓則為通過地球四個位置 E_1 E_2 E_3 與 E_4 之圓，其圓心以 C 點表示；S 為太陽之真實位置。（引自 Voelkel, 2001, p105）

在同書第 26 章裡，克卜勒則由太陽 S 點出發，引用他先前的暫代性假說，定出直線 SM。另由第谷之觀測，可定出直線 E_1M、E_2M 等之方向（與 24 章所述方法同），而由第谷之太陽理論，則可決定 SE_1、SE_2 等之直線方向（或 $\angle MSE_1$、$\angle MSE_2$ 等）。同理，由一邊二角可唯一定出三角形 MSE_1、MSE_2 等，或 E_1、E_2 等之所在位置。最後由它們劃出一圓，求得圓心 C 之位置，克卜勒得到 $SC=0.018$（Wilson, 1968, p6）。

克卜勒之如此重視地球之偏心結果，最主要就是欲將地球在傳統上的特殊重要角色，完全排除。並指出：地球無異於所有其他行星，他們全處於相同地位。

三、距離規則 — 天體動力學的成因

火星與地球軌道之偏心學說，指出了火星與地球或任何其他行星並不是在做等速圓周運動，行星靠近太陽時，會運動得較快；當遠離太陽時，會運動得較慢。這個必然的結果，促使克卜勒開始探討行星運動的成因 (cause) 與結構。

“簡言之，環繞著宇宙中心運動的行星，若愈遠離此中心時，它將以較少的力(*force*) 被推動著。所以，此種在強度上減弱的原因，必定是在行星本身與它內存的運動力(*motive force*)上，或是在設想的宇宙中心上。...故，不是力量的減弱造成行星遠離宇宙中心，便是遠離造成力量的衰減，...距離不論是在人們的思想上或是在自然的次序上，均先於空間中的運動。事實上，空間中的運動不可能與離開中心之距離無關，因為它需要有展現的區域；...因此，距離將是運動強度的原因，距離的遠近將造成所花費時間的多寡。”（Kepler, 1609; *Koyre′*, 1992, p189）

“說有一種生物力儲存在行星內，可將運動賦予在行星上，但卻不會隨著歲月的增長而受損或衰弱，這是荒謬的主張。”

“設想智慧與動力心靈(*motive souls*)的存在，是相當困難的。...大部分天體的運行是受物質的(*corporeal*)，而非生物的官能(*faculties*)來執行，例如，藉著更為普遍的磁性特徵。”

“所以，若隨著行星至宇宙中心之距離增減，而形成行星的緩慢與迅速，則運動力之來源，必定是落在我們所認為宇宙的中心點上。”

“太陽便是此力量的來源與座落之處，此力造成所有行星環繞它運行。”（Kepler, 1937, III, p34; *Koyre′*, 1992, p196）

克卜勒所重新發現的偏心點學說，與上述的動力學原因，徹底地將哥白尼的圓周軌道的圓心角色，轉移至太陽的位置上。如果行星並非以等速繞其圓心運轉，而是，其快慢會隨著至太陽之距離在改變，則此結果僅能以運動力來解釋。同時此運動力的來源，除了來自太陽身上以外，不可能來自任何其他地方。克卜勒就是由此運動原因出發，提出了他天文動力學中最重要的基本原理－距離規則（distance rule）。

在新天文學第 32 章中，由行星偏心模型，如圖 5，行星是以等角速率繞著偏心點 *C* 點，運行於以 *B* 點爲圓心之軌道 *DFEG* 上，而太陽是在另一偏心點 *A* 點上（$AB = BC$）。*HK* 弧長（正比於 $\angle HCK$）即行星運行 *DF* 弧長的所需花費的時間；同理 *IL* 弧長（正比於 $\angle ICL$）則可表示行星運行 *EG* 長度所需耗費的時間。

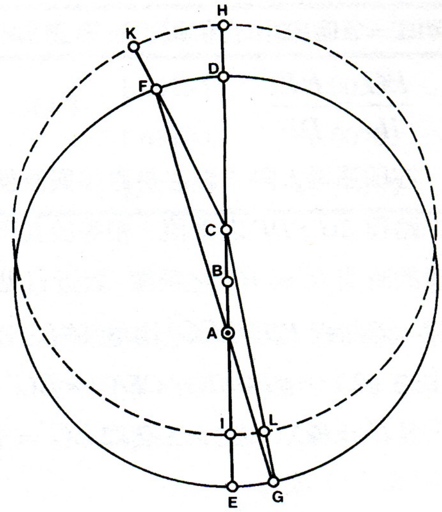

圖 5：距離規則 － 遠近日點速率與距離之關係：實線圓為以 *B* 為圓心，對 *C* 點以等角速率運行之行星軌道；虛線圓以 *C* 為圓心，其弧長可表時間。（引自 Stephenson, 1987, p64）

當角度很小時，$AD/AE = DF/EG$，且 $\angle DFC$ 與 $\angle HKC$ 皆接近於直角，可視爲相等；同理，$\angle EGC = \angle ILC$，則

$$\frac{CH}{CD} = \frac{HK}{DF} \qquad (1)$$

$$\frac{CE}{CI} = \frac{EG}{IL} \qquad (2)$$

由於 $AB = BC = e$（e 爲離心率），且由觀測知 $e \ll 1$，利用 $(1+e)/1 \approx 1/(1-e)$，並設半徑 $BD = BE = CH = CI = 1$，可得

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CH}{CD} \qquad (3)$$

由式（1）（3）得知 $AD/BD = HK/DF$；同理，$EG/IL = BE/AE$，再利用半徑 $BE = BD$ 爲 AD

與 AE 之幾何中項，如同式（3），即 BE/AE = AD/BE = AD/BD。合併以上三等式，得知

$$\frac{EG}{IL}=\frac{HK}{DF} \qquad (4)$$

亦即通過太陽 *A* 點之長直線與直徑所夾之二路程 *EG*、*DF* 之乘積，相等於其所對應花費的時間 *IL* 與 *HK* 之乘積。對近日點 E 點而言，若路程 *EG* 與 EG' 均為甚短之弧長，則由式（2），有 $EG/IL = CE/CI = EG'/IL'$（G' 與 L' 未標示於圖 5)。若取 $EG' = DF = s$，則式（4）成為

$$\frac{s}{IL'}=\frac{HK}{s} \quad \text{或}$$

$$\frac{HK}{IL'}=\frac{HK}{s}\frac{s}{IL'}=\left(\frac{HK}{s}\right)^2=\left(\frac{HK}{DF}\right)^2$$

根據式（1）及（3），則可得

$$\frac{HK}{IL'}=\left(\frac{CH}{CD}\right)^2=\frac{CH}{CD}\frac{AD}{BD}=\frac{AD}{CD}$$

又因 $CD = AE$，最後得知

$$\frac{HK}{IL'}=\frac{AD}{AE}$$

即行星在行星遠日點與近日點處，行經相同路程所需花費的時間（*HK* 或 IL'）與行星至太陽的距離 （*AD* 或 *AE*） 成正比。此謂之距離規則（Stephenson,1987, p64）。此規則出現在所有行星定律之前，因克卜勒認為它不僅可以物理意義加以了解和詮釋，且太陽與行星皆為真正的實體，而不像托勒密是以空無之抽象點：偏心點與本輪圓心，作為描述的參考點。同時此規則與隨後之橢圓軌道及面積定律，皆緊密相關。

四、橢圓定律

火星的暫代性假說，雖然成功地決定出火星的經度位置，但在緯度上卻出現很大的偏差。在新天文學第 19 章裡，克卜勒利用火星高度之觀測值，決定出太陽至軌道圓心之距離 *SC* 為 0.08000 與 0.09943（近於平分值），而非暫代性假說中的 0.11332 (Jacobson, 1999, p201)。同樣在第 20 章時，利用地球分別至太陽與火星二連線之夾角為垂直時的觀測值，所決定出之 *SC* 值則介於 0.08377 與 0.10106（Jacobson, 1999, p205)。或許，克卜勒在火星經度上可採用非平分值之暫代性假說，而在緯度上則可採用平分值的偏心點學說，但此種不能具有一致性、整合性與普遍性之做法，並未被克卜勒接受。他於是面對著兩種選擇：一是行星軌道不是圓形；另一是軌道依然為圓形，但等速圓周運動的參考點－偏心點需來回擺盪。但來回擺動的偏心點，過於複雜，不符合簡單性與經濟性的要求，克卜勒於是排除第二種的做法，而開始考慮第一種情形－非圓形軌道。

克卜勒選擇了三個火星的位置，其距離遠日點之真偏角（true anomaly，太陽行星連線與遠近線之夾角），為 10^0、37^0 與 104^0，在暫代性假說下，所計算出之太陽－火星距離，與觀測值比較，多出了如表 1 所示之量。

表 1：太陽－火星距離：偏心圓軌道假設下之計算值與觀測值之比較

時間 (年-月-日)	與遠日點相隔的角度	偏心圓軌道之計算值	觀測值	相差(圓形－觀測)
1590-10-31	$9^{o}37'$	1.66605	1.66255	+0.00350
1590-12-31	$36^{o}43'$	1.63883	1.63100	+0.00783
1595-10-25	$104^{o}25'$	1.48539	1.47750	+0.00789

（Dreyer, 1953, p389）

克卜勒於是大膽提出：

“（行星）軌道自遠日點開始，將越來越向圓內部靠近，且在離心偏角（*eccentric anomaly*）為 90^{0} 與 270^{0} 時，會與圓形有最大的偏差。此軌道在遠日點最寬，而在近日點最窄。…這種行星軌道不是圓形，而是卵形（*oval*）。”（Kepler, 1609; *Koyre′*, 1992, p244）

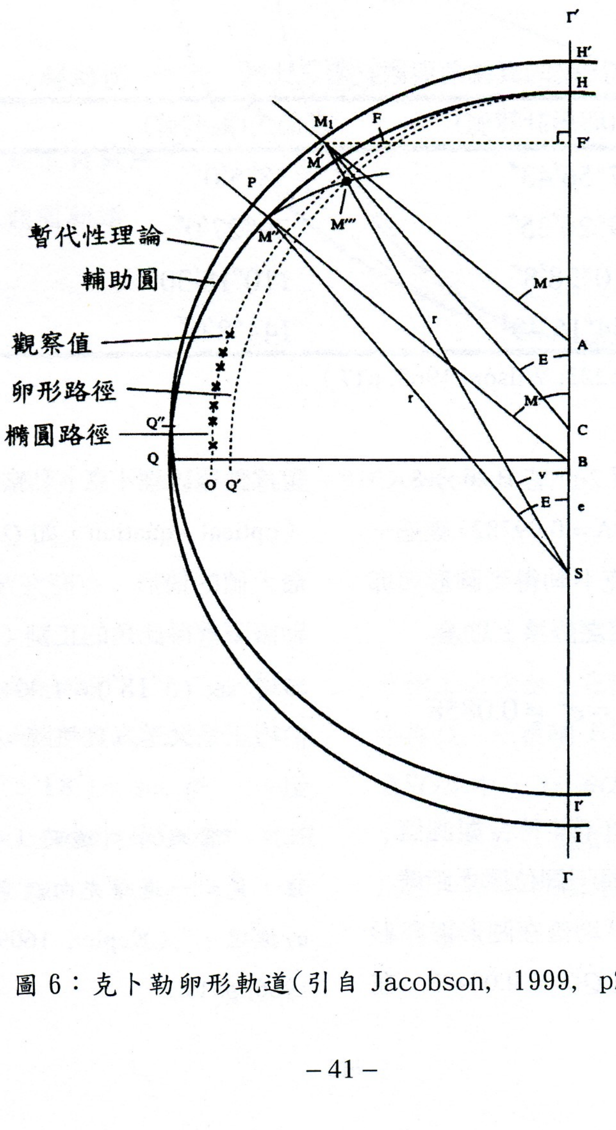

圖 6：克卜勒卵形軌道(引自 Jacobson, 1999, p219)

他很奇特地將兩個看似不相容的理論－暫代性假說與偏心距平分原理，融合在一起，來表示出此種卵形軌道。如圖 6，點 S、C 與 A 分別表示暫代性假說中之太陽、圓 $H'Q''I'$ 之圓心與偏心點之位置。B 則為 SA 之平分點，且為輔助圓 HQI 之圓心。火星 M_1 是在原先圓軌道上之位置，克卜勒採用了底下步驟來找出其新位置，以符合火星向圓內趨近的結果：

1.由時間（或均偏角 $\angle HAM_1 = M$ ）定出火星在圓軌道上之位置 M_1。
2.劃 BP 直線，使得 $\angle HBP = M$ ，BP 交圓 HQI 於點 M'' ，即 $BM''=1$。
3.以 S 為圓心，$SM'' = r$ 為半徑劃弧，交 SM_1 於 M''' 點，則 M''' 即為新軌道－卵形軌跡－上之一點 (Jacobsen, 1999, p210)。

雖然，克卜勒提出了此方法，滿足了火星向內趨近的現象，但在第 49 與 50 章裡，他發現困難依然存在。當火星的時間位置分別為 45^0、90^0、120^0 及 150^0 時，他以卵形假說所計算出來的真偏角，與觀察值有 $8'$ 角等不同的差別，如表 2 所示。這使他明白卵形模型，仍未能正確描述火星的軌道。

表 2：卵形假說下所計算出來的真偏角與觀察值之比較

均偏角	真偏角(卵形計算值)	真偏角(觀測值)	相差
45^o	$37^o56'43''$	$38^o5'0''$	$-8'00''$
90^o	$79^o26'35''$	$79^o27'0''$	$-0'25''$
120^o	$110^o28'8''$	$110^o18'30''$	$+9'30''$
150^o	$144^o16'49''$	$144^o8'0''$	$+8'49''$

（Kozhamthadam, 1995, p223; Wilson, 1968, p17）

在卵形模型中（如圖 7），若 B 平分 SA，則可設離心率 e = SB = BA = 0.09282，經過一些幾何關係的運算後，克卜勒得到圓形與卵形軌道，在與遠近線垂直之直線上之差

$$QQ' = 1-\sqrt{1-2e^2} = e^2 = 0.0858$$

(Jacobson, 1999)。

但如前言，卵形軌道不能符合觀測值。藉著計算 19 種太陽與火星不同位置之距離，克卜勒發現，觀測值幾乎均落在圓形與卵形軌道之中央，亦即觀測值 QO = 0.00429。在暫代性假說裡，克卜勒常會遇到視方程角 φ（optical equation，如 QS 與 QB 之夾角）為最大值的情形。有時在某些特別狀況，克卜勒需要求得此角的正割（secant）值，他赫然發現 sec ($5^o18'$) = 1.00429，而此值之尾數，恰巧正是火星真實軌跡，與圓形軌道之差 QO 值。

“當我看到這時，彷彿從睡夢中被喚醒，見到一道曙光向我穿透。我開始了底下的推理。”（Kepler, 1609, p56; Dijksterhuis, 1986, p319）

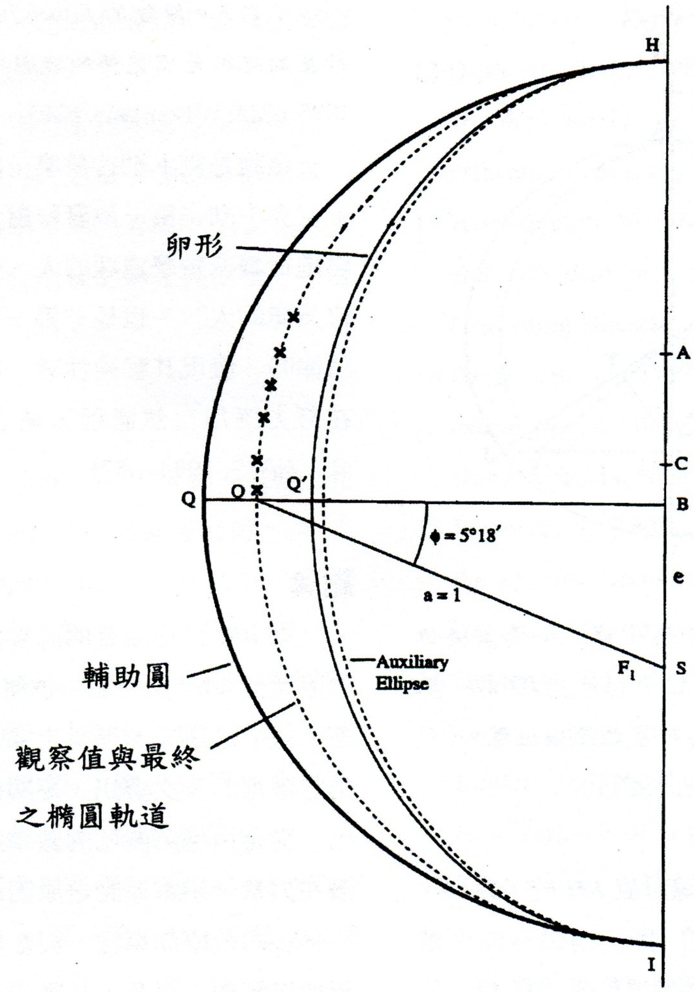

圖 7：克卜勒行星圓軌道（引自 Jacobson, 1999,, p210）

由圖 7，因

BQ / BO = 1/(1-0.00429)

$\cong$ 1+0.00429=1.00429

= sec$(5^o18')$ = sec φ

⇨BO=BQcosφ=1$\cdot$cosφ=OScosφ（此處半徑 BQ = 1）

⇨OS = 1 = 半徑

亦即，在與遠近線垂直且通過平分點 B 直線上之火星，它與太陽之距離剛好即是圓半徑長（或長軸 HI 之一半）。或者，在直角 ΔSOB 中，若 BO = b（半短軸），則有 $1-b^2=e^2$。以相同的方法，可自外接圓上之任一點 K，推出對應正確火星位置 M，如下（圖 8）：

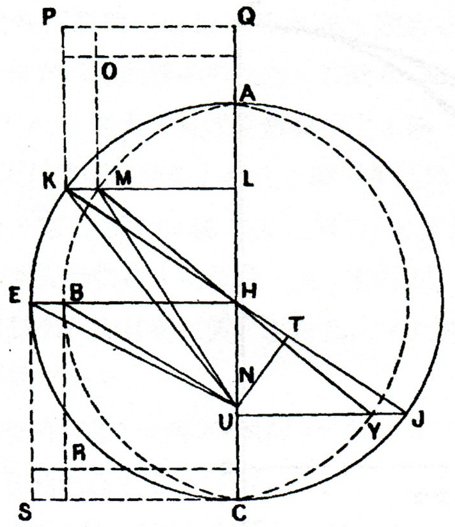

圖 8：克卜勒之橢圓軌道定律：N 為太陽位置，H 為圓心，$KL \perp AH$，$NT \perp KH$，取 $NM = KT$，則 M 為行星之正確位置。（引自 *Koyre'*, 1992, p275）

1.連接 KN，自 N 引直線垂直 KH 於 T；
2.在以 N 爲圓心，KT 長（稱爲徑向距離 diametral distance）爲半徑劃弧，交 KL（此處 $KL \perp AC$）於 M（Aiton, 1969, p84）。

由此方法所得到的曲線，剛好是落在圓形與卵形曲線之中間，並且與所觀測到的火星位置（含距離與角度）完全吻合。第 58 章裡克卜勒作了如下的結論：

“43 章中所提之圓，錯誤在於值太大；45 章中所提之卵形，錯誤在於值之不足，其中超出與不夠之量剛好相同。而僅有橢圓可被置放在圓形與卵形之間，所以行星的路徑僅能是一橢圓。”

而這個想法，曾在 1605 年 10 月 11 日，克卜勒給友人的信上，首次被提及：

“因此，親愛的 *Fabricius*，我有了答案，行星的路徑是個完整的橢圓。”（Kozhamthadam, 1995, p235; Wilson,1968, p21）

這就是克卜勒行星第一定律，在科學史上“克卜勒是第一位冒險對（天文學的）問題進行嚴密數學處理的人，是第一個確立起自然律的人”。也是“第一位在成功探索自然律時，發現其藝術性者，因爲，前人只是在努力應用自然過程，建立起說明性的概念”(伯特, 1994, p57)。

結論

克卜勒是地動說的忠實擁護者，且於哥白尼逝世 60 年後，第一位將其學說證實、推廣，並形成重要的行星定律。其中雖得力於第谷豐富的天文資訊，更關鍵的是克卜勒看出，從哥白尼所開始的數學運動之真實性與潛在力量－宇宙運動之原因，即是要以背後所呈現的數學簡單性、與數學和諧性，來重新加以解釋；以及，凡數學上爲真的東西，在實際上、或天文學上也爲真（伯特, 1994, 42 頁, 52 頁）。這種信念，使得克卜勒終其一生投入在天文學與數學知識的結合，而了無遺憾。

其中他指出了，宇宙之中心並非在地球所作正圓軌道之中心，而是在偏心點上之太陽。雖然，偏心點會造成非等速運動，而與均勻性不一致，但正由於太陽位於偏心點上，故對行星在不同距離的遠近日點處，會有不同影響，由此形成了最重要的天文動力學原理－距離規則：行星在遠日點與近日點處，行經相同路徑所需花費的時間，與至太

陽的距離成正比。此規則成爲他推導出橢圓軌道定律的真正基礎。

在教學上，我們當然無法也不需將克卜勒行星定律所使用的方法，加以詳細推導。然而了解重大科學定律的形成，是要在科學家的思想上產生什麼樣的轉化與改變，方能達成，則值得參酌與深思。

參考文獻

1.卡西勒 (E. Cassirer, 1994)：人論－人類文化哲學導引。台北市：桂冠圖書公司。

2.哥白尼 (N. Copernicus, [1543] 2001)：天體運行論。武漢市：陝西人民出版社。

3.拉卡托斯 (I. Lakatos, 1987)：證明與反駁：數學發現的邏輯。上海市：譯文出版社。

4.國立編譯館 (2000)：國民中學理化教科書，第四冊。台北市：國立編譯館。

5.國立台灣師範大學科學教育中心 (1999)：高級中學物理， 第一冊。台北市國立編譯館。

6.羅伊德 (G. Lloyd, 1984)：亞里斯多德思想的成長與結構。台北市：聯經出版社。

7.羅杰斯 (E. Rogers, 1989)：天文學理論的發展。北京市：科學出版社。

8.伯特 (E. Burtt, 1994)：近代物理科學的形而上學基礎。成都市：四川教育出版社。

9.Aiton, E. J. (1969). Kepler's second law of planetary motion. *Isis*, *60*, 75-90.

10.Barbour, B. (1989). *Absolute or relative motion*. New York: Cambridge, University Press.

11.Dreyer, J. (1953). *A history of astronomy from Thales to Kepler* . New York: Dover.

12.Dijksterhuis, E. (1986). *The mechanization of the world picture*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

13.Hetherington, N. (1987). *Ancient astronomy and civilization*. Tucson, AZ: Pachart Publishing House.

14.Gingerich, O. (1975). *Kepler's place in astronomy.* A. Beer (Ed.), In Kepler: Four Hundred Years. New York: Dergamon Press.

15.Jacobsen, T. (1999). *Planetary systems from the ancient Greeks to Kepler*. Seatle, WA: University Washington.

16.Kepler, J. ([1596] 1981). *The secret of the universe*. New York : Abaris Books.

17.Kepler, J. ([1609] 1992). *New astronomy.* New York: Cambridge University Press.

18.Kepler, J. (1937). *Johannes Kepler gesammelte werke*. Munich: Beck.

19. Koyre′ , A. (1992). *The astronomical revolution Copernicus-Kepler-Borelli.* NewYork: Dover.

20.Kozhamthadam, J. (1995). Discovery of Kepler's law: The Interaction of science, philosophy and religion. Notre Dame, ID：University of Notre Dame.

21.Marion, J. & Thornton, S. (1995). Classical dynamics of particles and systems. New York : Brooks & Cole.

22.Martens, R. (2000). Kepler's philosophy and the new astronomy. Princeton, NJ: Princeton University Press.

（下轉第 72 頁）

(上承第 45 頁)

23.Pasachoff, J. & Filippenko, A. (2000). The Cosmos: Astronomy in the new millennium. New York : Brooks & Cole.

24.Stephenson, B. (1987). *Kepler' s physical astronomy*. New York: Springer-Verlag .

25.Voelkel, J. (2001). *The composition of Kepler' s astronomia nova*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

26.Wilson, C. (1968). Kepler' s derivation of the elliptical path. *Isis, 59*, 5-25.

27.Yang, H. & Freedman, R. (2000). *University physics* (10th ed.). New York: Addison – Wesly.