
牛頓最先所提出功與動能概念的意涵

姚玢^{1*} 李秉書²

¹ 國立臺灣師範大學 物理系

² 臺北市立大理高級中學

壹、前言

功與動能是能量物理學裡非常基礎且關鍵的概念，在中學、大學教科書中與許多文獻中，皆會述及和討論。大部分作者都如此描述：當力與位移方向相同時，作用在物體上的功是物體所受的力與位移的乘積；若力與位移方向不同時，則功為力與位移的內積。而運動物體的動能為其質量與速度平方乘積的一半（國立台灣師範大學科學教育中心，1995；Halliday, Resnick, & Walker, 2011）；或說能量是一種作功的能力（Hobson, 2004）。至於功與動能為何要如此定義？它們最初是由誰提出？是為了要處理什麼樣的物理問題而發生？對於這些議題的討論觀點並不一致，而顯得相當分歧（Jewett, 2008；Mungan, 2007；Voroshilov, 2008），這是本文要釐清的重點。

另外，電磁學家馬克士威（C. Maxwell, 1831-1879）主張功是從一物體或系統到另一物體或系統的能量轉移作用（Maxwell, 1878, p. 104），若為如此，則能量概念似乎應先於功概念。功與能究竟孰先孰後，本文也欲加以澄清。

*為本文通訊作者

我們將從理論發展的觀點，由原著的選讀，追本溯源著手探討及了解：功、動能與功能定理之最初內涵。研究發現早在牛頓（I. Newton, 1642-1727）時期，他便已清楚提出功與動能的概念，雖然他尚未使用這些術語，然而多數文獻卻甚少指出此點（Mungan, 2007）。此外，許多教科書為了方便起見，常將對物體做功時，它所受的外力為人或機械所施的向上拉力（Halliday, Resnick, & Walker, 2011；Serway & Jewett, 2012）。我們也將強調最初牛頓所言對物體作功的外力，指的是重力或向心力，而非是外界所施的向上拉力。從這些探索過程中，可掌握功與動能原初的基本意義、清楚明白功與能之間的先後和相互關係、以及體會牛頓處理力學問題的思考方式、特色與影響，這些皆有助於教師及學習者了解物理知識如何的發展與成長。

貳、功與動能的基礎—力與運動定律

古典物理學的奠基者為牛頓，他所獨創的「力」概念與特殊的思考方法，開啟了物理的新世界。在其巨著《自然哲學的數學原理》（底下簡稱為《原理》）的序言中開宗明義地寫道：

我奉獻這一作品，作為哲學的數學原理，因為哲學的全部困難似乎在於——從運動的現象去研究自然界中的力，然後從這些力去說明其他自然現象。(Newton, 1687/1846)

力概念是他建構出整個物理學的基本骨架，沒有力概念的使用，就沒有古典物理學。「力」的提出是物理學獲得重大成果的轉捩點 (Westfall, 1977/2001)。牛頓認為：

定義 4：外力 (impressed force) 是施予在物體的作用，可改變其處於靜止或沿一直線作等速度運動的狀態。
(Newton, 1687/1846, pp. 73-74)

亦即「外力」並不涉及推、拉或碰撞，只要當物體運動「狀態」改變，我們便可說有「外力」作用在物體上。而力與運動狀態改變的量化關係，則由運動定律來描述：

定律 II：運動的變化與外加的運動力 (motive force) 成比例；且運動的變化是沿著外力的直線方向上。(Newton, 1687/1846, p. 83)

其中運動的變化就是現今所言的動量的變化。「通過在物質和運動的基礎上，加上一個新的範疇——力，… 牛頓把它們放在一個精確的物理背景中，這些力都可由數學準確地描述出。」(Westfall, 1977/2001, p152)

1736 年瑞士數學家白努利 (J. Bernoulli, 1667-1748) 直接清楚地將牛頓第二運動定律表示成：(Bernoulli, 1736, p. 6)

$$f = ma \quad (1)$$

由於此式清晰簡潔，而成為日後教科書中所採用第二運動定律的標準寫法。注意第二運動定律 $f=ma$ 左邊的 f ，並非總是固定的推力或拉力，牛頓所討論的力常幾乎總是指行星受到太陽作用的向心力、或物體受到地球的吸引力，也就是一種物體與力心距離的位置函數，他從未提過機械或人所施予物體的向上拉力 (Newton, 1687/1846, p. 83)。

參、與動能概念的首次出現—命題 39

當牛頓提出創新的力概念及建立起運動定律後，在《原理》的第一卷第七章，他提出了隱含有「功」與「動能」概念在內的重要命題 39，這也是最早清楚出現此二概念的出處文獻：

若給定任意形式的向心力以及(力—位置關係)曲線下圖形的面積，求沿一直線上升或下降的物體，在它所經過各個位置時的速度。(如圖 1)
(Newton, 1687/1846, p. 165)

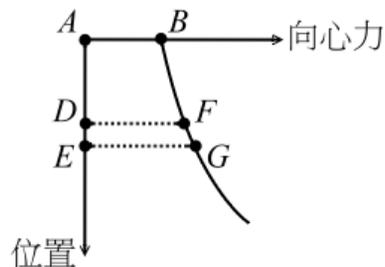


圖 1. 力—位置關係圖。修改自 Newton's Principia, Newton, 1687/1846, p. 165。

在此命題中，牛頓是想探討沿垂直線運動（如沿著直線經過 D、E 點下降）的物體，在受到向心力，尤其是地球表面上的重力作用時，物體在任意位置處與其所對應的速度（《原理》全書中皆使用 velocity 一字，未曾使用速率 speed）之關係。如圖 1，他選定力為橫軸，位置為縱軸之後，寫出底下相當重要、但很精簡的論證：

1. 物體經過極小線段 DE 所需的時間 (Δt) 正比於該線段的長度 DE (或 Δx)，反比於速度 v 。(即 $\Delta t \propto \Delta x/v$)。
2. 由第二定律：作用力正比於速度的增量 (或 Δv)，反比於時間 (Δt)。(即 $F \propto \Delta v/\Delta t$)。
3. 因此，物體在極短時間內落下時，作用力的大小 DF 將會與 $\Delta v \cdot v/\Delta x$ 成正比。
4. 所以，(在任意點 E 的) 作用力 EG 將會使物體以一特定速度落下，即 (在 E 點) 速度的平方正比於面積 $ABGE$ 。(Newton, 1687/1846, p. 166)

在此，他僅使用速度—位移定義關係式 $v \propto \Delta x/\Delta t$ 及第二定律式(1)，即可得到第 3 步驟的結果

$$F \propto \Delta v \cdot v/\Delta x \quad \text{或} \quad F\Delta x \propto v \Delta v \quad (2)$$

如果物體自 A 點由靜止受力作用後，垂直下落至 E 點，可將此微小時刻下的關係(2)累積起來表示在 E 點所對應的總效果，即

$$\sum F\Delta x \propto \sum v\Delta v \quad (3)$$

上式左邊就是力—位置關係曲線下之面積 $ABGE$ ，右邊則為由 $v \Delta v$ 所累積的面積，

若物體在 A 點為靜止，則 $\sum v \Delta v$ 之累積值即為斜率為 1 的斜線下所含蓋自原點至末速率 v 的三角形面積 $v^2/2$ ，遂可得：

$$\sum F\Delta x \propto v^2/2 \quad (4)$$

亦即在 E 點速度的平方正比於面積 $ABGE$ 。若以現今數學表示，式(4)等式左邊的累積值即為積分值 $\int Fdx$ ，而此值正是外力對物體所作之「功」；在不考慮質量條件下，等式右邊之累積值為 $v^2/2$ ，代表著物體的「動能」。故在此命題及其論證中，牛頓已經清楚地暗示了日後「功」與「動能」的概念，與彼此間的先後與正確關係：是先考慮力—位置關係曲線下圖形的面積—或功，由它可得到所經過不同位置時的速度—或動能，即功先於動能。此外，牛頓雖然沒有明確使用今日的術語，但此命題可說是物理史上功與動能概念最早的起源與出處。

一般學生從課堂上或教科書裡學習功概念時，總容易將功與工程上的工作量對應在一起，且認為抵抗重力的向上拉力、或抵抗彈力的水平拉力所作的功，是思考和解決動能與位能問題的重要物理量（國立台灣師範大學科學教育中心，1995, pp. 10-17; Halliday, Resnick, & Walker, 2011）。但由上述討論可知，牛頓考慮的是向心力或重力對落體所作的功，未曾探討「拉力」作功的情形，也代表該量並非是他所感興趣的物理量。因此，若避開去思考拉力所作的功，對欲了解牛頓力學裡有關功與動能最初的根本意涵及內容的學習者，必有直接澄清的助益。

肆、普遍性功概念的提出—命題 40

上述所討論的式(2)與(3),及對應所隱含的功與動能概念,皆僅在力與位移方向相同時方成立。若作用力與位移方向不同時,該如何處理?牛頓接著在下一個命題 40 (如圖 2) 提出了他的想法:

若一物體受到某一向心力(力心為 C) 作用,而在任一路徑上(如 VIK) 運動時,另一物體則沿著直線下降(如 VDE);若已知在某一相同高度時(如 D 與 I) 它們的速度相等,則在其它任意相同高度時(如 E 與 K),它們的速度也都會相等。(Newton, 1687/1846, p. 165)

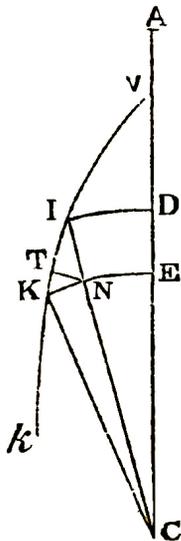


圖 2 向心力 IN 與其沿位移方向分量 IT 之關係圖。引自 Newton's Principia, Newton, 1687/1846, p. 165。

在論證中牛頓利用了第二定律的另一形式:在直線上運動之物體,其速度的增加量 Δv 正比於力 F 與時間間隔 Δt 的乘積,即

$$\Delta v \propto F \Delta t \quad (5)$$

來分析路徑一 VDE 與路徑二 VIK 的運動。由於在直線上做速率增加之加速運動物體,其速度方向與力 F 方向相同,將此性質推廣至平面運動:力僅有在沿著速度方向(或路徑的切線方向)上的值 $F_{//}$,才可造成速度增量,與它垂直方向上的值 F_{\perp} ,則只會改變速度方向。由於 D 與 I 至力心 C 之距離皆相同,表示在該點上物體所受之向心力 F 大小亦相同(因向心力僅為距離的函數),可用等長之短線段 $DE=IN$ 來表示這些向心力。若在 D 與 I 處初速相同,於極短距離下,自 D 與 I 分別至 E 與 K 之位移 DE 與 IK ,可分別代表所費之時間 Δt 與 $\Delta t'$ 。則自 D 到 E 之速度改變量 Δv_1 ,與自 I 到 K 之速度改變量 Δv_2 ,按照上述第二定律形式的式(5)分別為

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &\propto F \Delta t \propto DE \cdot DE = DE^2 \\ \Delta v_2 &\propto F_{//} \Delta t' \propto IT \cdot IK = IN^2 = DE^2 \end{aligned} \quad (6)$$

可得知兩速度增量彼此相等 $\Delta v_1 = \Delta v_2$,其中 $F_{//}$ 表示力 IN 在沿速度方向(或沿位移 IK 方向)上之分量,即 IT ,式中並引用了在直角三角形 $\triangle INK$ 內,頂點 N 至斜邊垂足 T 之所形成之比例關係 $IT \cdot IK = IN^2$ 。因此,在其它任意相同高度處(如 E 與 K),它們的速度也都會相等,而得證。

式(6)中 $F_{//}$ 表示沿位移 IK 方向上之力分量,速度增量 Δv 則正比於「沿位移方向之力分量」與時間或位移的乘積,這是物理學史上首次出現「沿位移方向之力分量」,及討論它與位移乘積的最初來源。

伍、討論

一、功與動能概念發生的關鍵與先後關係

功與動能概念的產生、意義及其關係最早是在 1687 年由牛頓於《原理》命題 39 中所提出，雖然當初他並未明確使用「功」與「動能」此二名詞。當時牛頓心中「功」的意義為外力相對於物體位置的關係函數曲線下，自起點到終點所含蓋的面積值；當物體作直線運動，且所受外力為一定值時，他所說的曲線下之面積，即是今日一般所稱：功是物體所受的力與其位移之乘積。

牛頓所以提出「功」的概念，是為了要發現受向心力作用，沿直線下落的物體，任意位置—速度間的對應關係。為達成此目標必須要計算運動物體的速度增量，其中所使用最重要的關鍵式即為：

$$a\Delta x = v\Delta v \quad (7)$$

此處 a 與 v 分別表示物體的加速度與速度， Δx 與 Δv 分別表示物體的位移增量與速度增量。而式(7)基本上是由加速度定義 $a = \Delta v / \Delta t$ 及其與位移 Δx 之乘積，重組後所得，即 $a\Delta x = (\Delta v / \Delta t)\Delta x = v\Delta v$ 。

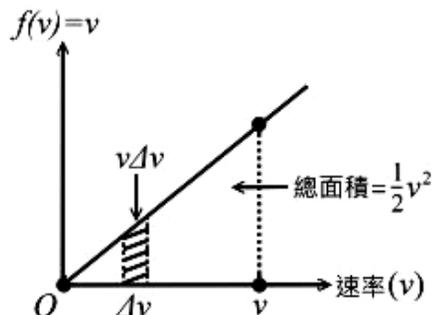
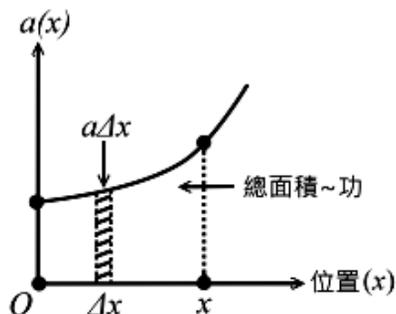


圖 3 (a) 若視質量為一單位，加速度 a 與位移增量 Δx 乘積所形成之積分量，即為外力所作的功。
(b) 速度 v 與速度增量 Δv 乘積所形成之積分量，即為物體的末動能，且 $a\Delta x = v\Delta v$ 。

若將加速度—位置關係圖與對應之速率關係圖繪出。如圖 3(a)與(b)中，式(7)代表任一小段位置 Δx 與小段速度 Δv 分別所對應之陰影面積會相等，該式也可稱為任意時刻加速度 a 與速度增量 Δv 的微分關係式。進一步地，牛頓發現將此式(7)左邊的量，累積起來，即為加速度—位置關係線下的面積，便會與同式右邊累積起來之值 $\sum v\Delta v$ 相等。若物體初速為零，此累積值即是末速度平方之半 $v^2/2$ ，此值乘上質量後，便是日後所言之物體「動能」，這也說明了一般中學生常困惑為何動能需要係數 1/2 的原因。

式(7)之累積式為 $\sum a\Delta x = \sum v\Delta v = v^2/2$ ，兩邊同乘上質量，再利用牛頓第二運動定律，可得 $\sum F\Delta x = mv^2/2$ ，而左邊代表力—位置關係線下的面積，也就是日後所說的「功」。結合左右兩邊，遂可得到物體自靜止開始運動的「功能定理」：

$$\text{功} = \text{末動能} \quad \text{或} \quad \int F dx = \frac{1}{2} m v^2 \quad (8)$$

此式或功能定理可稱為式(7)的積分關係式。利用此積分關係式，牛頓便可達成其目標：求得物體在各個位置時的速度。

也可說是先有式(8)左邊的力—位置關係線下的面積，然後利用式(7)，方可得到等式右邊不同位置時的動能，即功概念的發生是先於動能概念，而非在其後。對於電磁學家馬克士威稱功是從一系統到另一系統的能量轉移作用，是從已奠定後的能量概念返回定義功，他如此做可能是為了方便探討碰撞或熱學現象而提出，但卻也模糊了此兩概念發展過程的實情。

回溯史實，物理學家牛頓最初提出「功」的概念，並定義它是物體所受外力與其位移之乘積之累積值，完全是為了想預知物體在外力作用下，它在任一位置處的速度。而非如日後的工程師，所想了解抵抗重力的拉力可使物體抬升多少高度，或完成了多少工程上的工作量；他也未曾提及或主張動能是一種作功的能力。

功概念的原始關係為 $a\Delta x = v\Delta v$ ，這是一種短距離的微分關係式，將其累積後則形成積分關係式，而等式右邊 $\sum v\Delta v$ 的積分值等於 $v^2/2$ ，與質量之乘積即為動能的定義。因此，功與動能概念的形成是無法避開數學語言，而其中所含數學化及數學分析性的方法過程，正顯示出與能量有關的科學方法的真實改變歷程(Matthews, 1994, p. 50)。

二、功普遍化的意涵—內積的來源

在《原理》命題 40 中，當力與位移方向不同時，牛頓不再論及力—位置關係線下的面積，而首次考慮「沿位移方向之力分量」。對於在平面上運動的物體，由式(6)的第二定律，力 F 若要對物體產生速度增量，則僅有在沿著速度方向、或路徑的切線(或位移)方向上之分量值 $F_{//}$ ，才可產生貢獻效果；而此分量與位移的乘積就可代表速度增量 Δv 的大小。即

(速度增量)

\propto (力沿速度方向之分量) \times (作用時間)

\propto (力沿位移方向之分量) \times (位移)

在此利用了：於極短時間下，位移與作用時間互成正比。

為求得位移與受力方向不同時的速度增量，牛頓所言：「沿位移方向之力分量」與位移之乘積，即為現今所稱：功為物體所受外力與其位移的「內積」。在他之前或同時代的專家，皆未曾知道或使用過此種描述與論證。

進一步而言，不論力與位移方向是否相同，只要將功視為力與位移之內積，而非乘積，則功能定理式(8)依然成立，藉此亦可求得物體在各個位置時的速度。

陸、在教學上的意義與結論

能量知識在物理學上的成形，正是由牛頓最初提出功與動能之概念所開啟的，他在《原理》一書中，使用第二定律的微小增量關係式(2)： $F\Delta x \propto v\Delta v$ ，與將其累

積起來的求和關係式(3)： $\Sigma F\Delta x \propto \Sigma v\Delta v$ ，以求得物體在任意位置處的速度，而此式左邊就是現今所言的「功」之定義，右邊之累積值即為斜直線下的三角形面積 $v^2/2$ ，也對應今天所說的物體「動能」。這是此二概念最早的發源處，它們不是出自於日後工程上的需求而有的想法。

牛頓從第二運動定律所強調的微小增量關係開始，透過將其累積起來的求和關係式，最後得到功與動能的概念以及功能定理，其中蘊藏了豐富的思考內涵及深刻的推理方法，也開啟與引導了日後物理學家的分析視野，影響深遠。若是直接使用一些工程上或日常生活經驗的類比，學生可能依然不易體會，或引起一些迷思，或遺漏重要觀念，甚或因含混不清而排斥對科學的學習。教師不妨嘗試，依照真實的歷史發展過程，將當初牛頓為求得在外力作用下，物體在不同位置的速度或速度增量的問題引導出來。讓高中以上的學生體會微小增量的微分量，及其累積的積分量所代表的意義，接著可指出功即為與微小位移增量有關的積分量，而動能則為與速度增量有關的積分量。直接切入主軸，如當初牛頓一般，逐步地扼要推展。事實上，這正反應出牛頓創建微積分學的用意，同時也是極佳的應用展示，此方法在隨後的物理數學分析中亦會不斷出現。

這些可作為教師教學策略設計上很好的範例，它能呈現出科學為何要這般思考的意涵(Shapere, 1984, p. 190)。或許這麼做需使用多一些時間，但花費這些時間

所建立與展開的方法，不僅可增強學生對物理形式關係的詮釋能力，同時也是學生日後在物理領域中會反覆使用的思考內容及分析方法。教師也有必要鼓勵學生，建立這些數學分析與真實世界之間明確的連結關係(Lawson & McDermott, 1987)。藉著這些過程的學習，學生除了可獲得能量的基礎觀念是如何形成、及科學知識是如何發展的良好實例，未來也必會得到可觀的學習成就與回饋。

縱使教師認為以上分析內容對部份高中學生或許難度較高，然而牛頓的思考方式，與功和動能提出的歷史過程，仍然值得物理教師們參考。由於教師是教學成敗的關鍵，教師所具備的知識應比他所要教的多一些，在教學之前，物理教師也須先認識與經歷該如何進行精確與深刻的科學思考。而透過上述對功與動能思想發展過程的了解，或根據該史料簡明地重新走一遍，將使教師具有更充份的教學知識，來引導學生進行有效合理的物理思考，及建立良好的學習方式。這是一種實事求是的教學方法，並與物理學的真实內容相當契合，也可呈現物理知識的正確內涵。

參考文獻

- 國立台灣師範大學科學教育中心(1995)。
高級中學物理第二冊(吳大猷主編)。台北市：國立編譯館。
- Westfall, R. S. (1977)。近代科學的建構—機械論與力學(彭萬華，譯)。上海市：復旦大學。(原著出版於1977年)
- Bernoulli, J. (1736). *Recherches physiques et géométriques sur la question: Comment*

- se fait la propagation de la lumière*. Paris: Imprimerie Royale.
- Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2011). *Fundamentals of Physics* (9th ed.). New York: John Wiley & Sons, 167-171
- Hobson, A. (2004). Energy and Work. *The Physics Teacher*, 42(5), 260.
- Jewett, J. (2008). Energy and the Confused Student I: Work. *The Physics Teacher*, 46(1), 38-43.
- Lawson, R. A., & McDermott, L. C. (1987). Student understanding of the work-energy and impulse-momentum theorems. *American Journal of Physics*, 55(9), 811-817.
- Matthews, M. R. (1994). *Science teaching: The role of history and philosophy of science*. New York: Routledge.
- Maxwell, J. C. (1878). *Matter and Motion*. New York: D. Van Nostrand Company.
- Mungan, C. (2007). Defining Work. *The Physics Teacher*, 45(5), 261.
- Newton, I. (1846). *Newton's Principia: The Mathematical Principles of Natural Philosophy* (A. Motte, Trans.). New York: Daniel Adee. (Original work published 1687).
- Serway, R. & Jewett, J. (2012). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (8th ed.). New York: Brooks/Cole, 219.
- Shapere, D. (1984). *Reason and the search for knowledge: Investigation in the philosophy of science*. Holland: Reidel Press.
- Voroshilov, V. (2008). On a Definition of Work. *The Physics Teacher*, 46(5), 260.